

---

# ALLGEMEINE STERBETAFEL 2010/12 – NEUE ANSÄTZE ZUR GLÄTTUNG UND EXTRAPOLATION DER STERBEWAHRSCHEINLICHKEITEN

---

Dr. Felix zur Nieden, Prof. Dr. Roland Rau, Dr. Marc Luy

---

↳ **Schlüsselwörter:** Sterbetafel – Lebenserwartung – Extrapolation – Glättung – Zensus 2011

## ZUSAMMENFASSUNG

Eine Sterbetafel ist ein demografisches Modell, das die zusammenfassende Beurteilung der Sterblichkeitsverhältnisse einer Bevölkerung unabhängig von ihrer Größe und Altersstruktur ermöglicht. Allgemeine Sterbetafeln werden jeweils im Anschluss an eine Volkszählung erstellt und bis zu der Altersstufe von 100 Jahren veröffentlicht. Bei der Erstellung der allgemeinen Sterbetafel 2010/12 für Deutschland und die Bundesländer kamen neue Ansätze zur Glättung und zur Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeiten in der amtlichen Statistik zum Einsatz, die in diesem Beitrag erläutert werden. Unter Verwendung dieser Methoden ist es möglich, die den altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten in Deutschland und den Bundesländern zugrunde liegenden Muster abzuleiten.

↳ **Keywords:** Life table – life expectancy – extrapolation – smoothing – 2011 Census

## ABSTRACT

*A life table is a demographic model which permits a general assessment of mortality-related aspects in a population irrespective of its size and age structure. General life tables are constructed after each population census. They are compiled and published for the population up to the age of 100 years. This article explains the new approaches to smoothing and extrapolating probabilities of death in official statistics which were applied in constructing the general life table 2010/12 for Germany and its Länder. Using these methods, basic patterns of age-specific probabilities of dying could be derived for Germany and the Länder.*

### Dr. Felix zur Nieden

ist seit 2014 im Bereich Bevölkerungsstatistik des Statistischen Bundesamtes tätig. Er hat an den Universitäten Rostock und Lund Demografie studiert und als Stipendiat des Max-Planck-Instituts für demografische Forschung an der Universität Rostock promoviert.

### Prof. Dr. Roland Rau

ist seit 2011 Inhaber des Lehrstuhls für Demographie an der Universität Rostock. Seine Forschungsschwerpunkte liegen in der mathematischen und der statistischen Demografie sowie in der Analyse und Prognose der Sterblichkeit. Als Mitglied des wissenschaftlichen Beratergremiums unterstützte er das Statistische Bundesamt bei der Erstellung der allgemeinen Sterbetafel 2010/12.

### Dr. Marc Luy

ist Leiter der Forschungsgruppe "Health and Longevity" am Vienna Institute of Demography in Wien. Seine Arbeitsschwerpunkte sind die Entwicklung der Lebenserwartung, die Determinanten von Gesundheit und Sterblichkeit sowie indirekte Schätzverfahren. Auch er war Mitglied des wissenschaftlichen Beratergremiums bei der Berechnung der allgemeinen Sterbetafel 2010/12.

## 1

### Einleitung

Der Wert für die Lebenserwartung bei Geburt ist einer der bekanntesten und wichtigsten demografischen Indikatoren zur Charakterisierung der vorherrschenden Mortalitätsverhältnisse. Für den Zeitraum 2010/12 beträgt sie in Deutschland 77,7 Jahre für Männer und 82,8 Jahre für Frauen. Diese Werte resultieren aus einem komplexen demografischen Modell: der sogenannten Sterbetafel. Ausgangsbasis einer Sterbetafelberechnung sind dabei stets die altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten. Der vorliegende Artikel widmet sich im Detail den neuen Ansätzen zur Glättung und zur Extrapolation dieser Sterbewahrscheinlichkeiten, die bei der Erstellung der allgemeinen Sterbetafel 2010/12 zum ersten Mal in der amtlichen Statistik zum Einsatz kamen.

Die Aufstellung von allgemeinen Sterbetafeln hat in der amtlichen Statistik eine lange Tradition. Schon die erste für das damalige Deutsche Reich veröffentlichte Sterbetafel für den Zeitraum 1871/81 wurde als allgemeine Sterbetafel bezeichnet. Allgemeine Sterbetafeln werden in Deutschland jeweils im Anschluss an eine Volkszählung oder einen Zensus berechnet und ermöglichen somit eine Quantifizierung der Sterblichkeitsverhältnisse auf Basis möglichst genauer Bevölkerungsdaten. Allgemeine Sterbetafeln sind wie die laufend berechneten Sterbetafeln sogenannte Periodensterbetafeln. Diese reflektieren eine Momentaufnahme der Sterblichkeitsverhältnisse einer Bevölkerung während eines bestimmten Zeitraums. Die Lebenserwartung bei Geburt gibt in einer solchen Sterbetafel an, wie viele Lebensjahre Neugeborene nach den in der aktuellen Beobachtungsperiode geltenden Sterblichkeitsverhältnissen im Durchschnitt leben würden. Die sogenannte fernere Lebenserwartung gibt an, wie viele weitere Lebensjahre Menschen eines bestimmten Alters diesen Sterblichkeitsverhältnissen entsprechend noch leben könnten. Eine Abschätzung der künftigen Entwicklung der Sterblichkeitsverhältnisse ist dabei nicht eingeschlossen. Bei der Berechnung einer allgemeinen Sterbetafel werden die altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten geglättet und somit von Zufalls- und gegebenenfalls Kohorteneffekten befreit, um grundlegende Sterblichkeitsmuster abzuleiten. Das Statistische Bundesamt hat für die Berechnung der allgemeinen Sterbetafel stets

Arbeitskreise oder wissenschaftliche Beratergremien eingerichtet, um die zu treffenden methodischen Entscheidungen unter Berücksichtigung des gegenwärtigen Forschungsstands und der Verfügbarkeit der notwendigen Daten zu treffen. Im Fachbericht zur allgemeinen Sterbetafel 2010/12 ist bereits ein Überblick über die angewandten Methoden geliefert worden (Statistisches Bundesamt, 2015a).

Im Ergebnis des Austausches beim wissenschaftlichen Beratergremium zur allgemeinen Sterbetafel 2010/12<sup>1</sup> kam zur Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten<sup>2</sup> erstmalig ein P-Spline-Verfahren zum Einsatz. In einigen Bundesländern wurde der Verlauf der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten im Kindes-, Jugend- und jungen Erwachsenenalter zudem mithilfe des Logit-Modells nach Brass ergänzt. Im hohen Alter wurde zur Extrapolation der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten ein logistisches Modell genutzt. Die Verwendung dieser datenverändernden Verfahren ist dadurch zu rechtfertigen, dass für die Ermittlung von grundlegenden Sterblichkeitsmustern selbst eine Vollerhebung von Bevölkerung und Sterbefällen letztlich nur den Charakter einer Stichprobe besitzt. Der Verlauf der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten zeichnet sich nämlich dadurch aus, dass er umso kontinuierlicher wird, je größer die jeweils zugrunde liegenden Fallzahlen sind. Entsprechend weist der Verlauf der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten für Deutschland insgesamt noch einen relativ kontinuierlichen Verlauf auf. Auf Ebene der Bundesländer führen die geringeren Fallzahlen bei direkter Verwendung jedoch zum Teil zu Mortalitätsmustern, die sich nicht mit dem vorhandenen Wissen über die typischen Eigenschaften der menschlichen Sterblichkeit in Einklang bringen lassen. So ändern sich die altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten teilweise sprunghaft von Altersjahr zu Altersjahr, was ohne Anpassung der Daten zu nicht plausibel erscheinenden Rückgängen der Sterblichkeit mit zunehmendem Alter führen würde. Für einige Altersjahre lassen sich sogar trotz der Berücksichtigung eines Dreijah-

1 Mitglieder waren Prof. Dr. Eckart Bomsdorf (Universität zu Köln), Annett Kirschke (Statistisches Landesamt des Freistaates Sachsen), Dr. Marc Luy (Vienna Institute of Demography/Austrian Academy of Sciences), Prof. Dr. Roland Rau (Universität Rostock) sowie Dr. Kerstin Ströker (Information und Technik Nordrhein-Westfalen/Geschäftsbereich Statistik).

2 Als rohe Sterbewahrscheinlichkeiten werden die Werte bezeichnet, die direkt aus den altersspezifischen Bevölkerungsbeständen und Sterbefällen berechnet wurden.

reszeitraums aufgrund ausgebliebener Sterbefälle gar keine Sterbewahrscheinlichkeiten ermitteln. Zudem kommt es zu mehreren Überschneidungen von männlichen und weiblichen Sterbewahrscheinlichkeiten, was bei ausreichend hohen Fallzahlen nur in sehr seltenen Ausnahmefällen zu beobachten ist. Die in diesem Artikel vorgestellten methodischen Verfahren ermöglichen es, auch unter solchen Voraussetzungen die zugrunde liegenden Sterblichkeitsmuster abzuleiten.

## 2

---

### Methodische Eingriffe in die rohen Daten

---

#### 2.1 Glättung

---

Für die Glättung der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten kamen zwei verschiedene Verfahren zum Einsatz: zum einen ein P-Spline-Ansatz nach Eilers und Marx (1996), und zum anderen das von Brass (1971, 1975) entwickelte Logit-Modell. Letzteres wurde allerdings nur in solchen Fällen angewandt, in denen sich mithilfe der P-Spline-Glättung keine plausiblen Verläufe der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten generieren ließen, was für 7 der 16 Bundesländer der Fall war. Für die übrigen neun Bundesländer, das frühere Bundesgebiet (ohne Berlin-West) und die neuen Länder (ohne Berlin-Ost) sowie für die gesamtdeutsche Bevölkerung kam ausschließlich der P-Spline-Ansatz zur Anwendung. Der methodische Hintergrund zur jeweiligen Methode sowie deren Auswirkungen auf die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten werden in den folgenden Abschnitten jeweils für Deutschland insgesamt und am Beispiel einzelner Bundesländer erläutert.

#### P-Splines

Die Glättung der Sterbewahrscheinlichkeiten erfolgte zunächst mittels P-Splines. P-Spline steht dabei für „penalized B-Spline“, wobei B-Splines (Basic-Splines) Polynome vom Grad  $n$  mit abstandsgleichen Knotenpunkten (Splines) sind. Beim P-Spline-Ansatz werden nun die seit Jahrzehnten bekannten und verwendeten B-Splines als Basis für eine Regressionsschätzung verwendet (zum Beispiel de Boor, 1972). Das klassische Problem, Anzahl

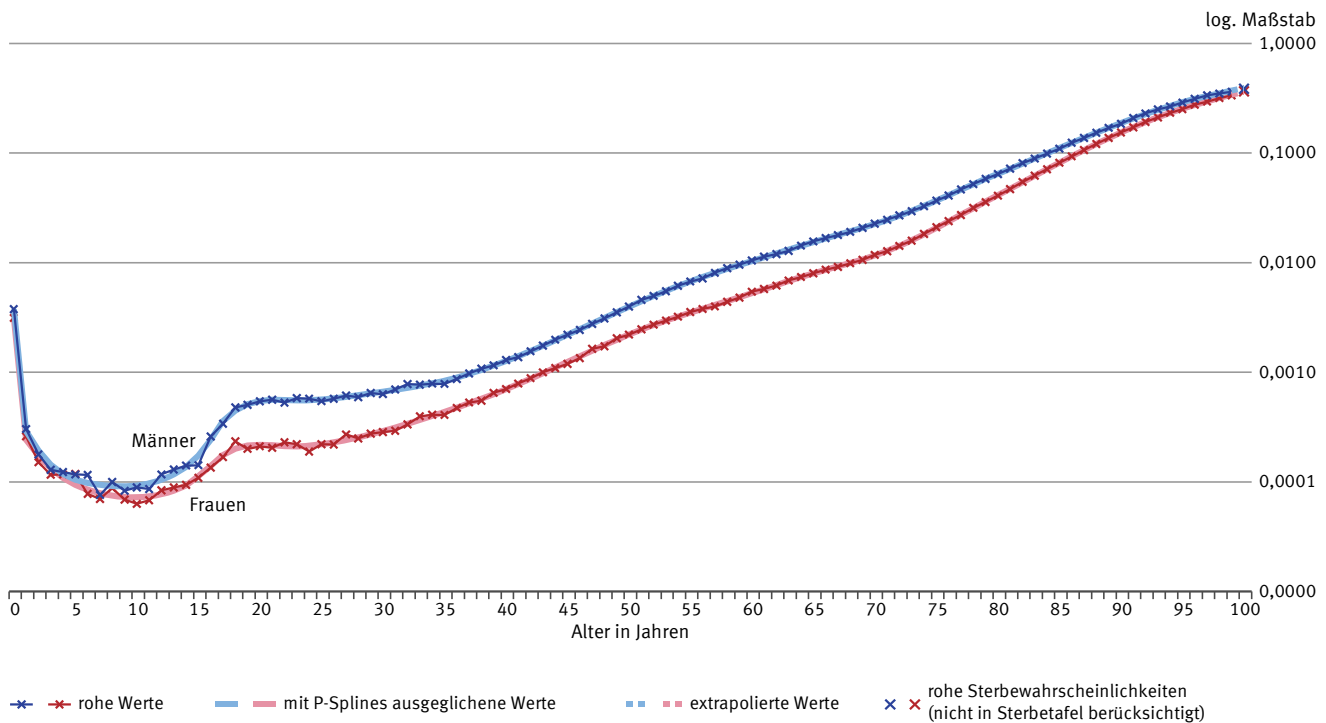
und Lage der B-Spline-Knoten zu definieren, wird beim P-Spline-Ansatz dadurch gelöst, dass in einem ersten Schritt „zu viele“ B-Spline-Knoten gesetzt werden. Dies würde normalerweise eine zu starke Anpassung an die Daten zur Folge haben („overfitting“). Verhindert wird dies durch einen sogenannten „Penalty-Term“, der bei einer zu großen Variabilität der Schätzung zum Greifen kommt (Fahrmeir und andere, 2007, Seite 307). Einen umfassenderen Einstieg und Überblick zu P-Splines liefern Eilers und Marx (1996, 2010). Im Bereich der Mortalitätsglättung in der Demografie hat dieser Ansatz im vergangenen Jahrzehnt großen Anklang gefunden (zum Beispiel Camarda, 2012; Currie und andere, 2004; Ouellette/Bourbeau, 2011). Der Unterschied im vorliegenden Fall der allgemeinen Sterbetafel zur zitierten Literatur besteht darin, dass Sterbewahrscheinlichkeiten und nicht Sterberaten vorlagen. Bei Sterbewahrscheinlichkeiten sollten die Sterbefälle im Zähler als binomialverteilt und nicht als Poisson-verteilt wie bei Sterberaten angenommen werden. Entsprechend wurde trotz geringer praktischer Auswirkungen ein Code in der Programmiersprache R verwendet, welcher wahrscheinlichkeits-theoretisch konsistent eine Binomialverteilung für die gemessene Sterblichkeit annimmt (siehe auch Rau und andere, 2013).

Grafik 1 zeigt die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten (mit Linien verbundene Datenpunkte) für Deutschland zusammen mit dem durch die P-Splines geglätteten Verlauf (helle durchgezogene Linien). Von der Glättung ausgenommen ist dabei der Wert der Säuglingssterblichkeit. Der deutliche Sprung zwischen Alter 0 und 1 ist ein typischer Befund, der durch eine Glättung nicht relativiert werden sollte. Die Ursachen für die Säuglingssterblichkeit unterscheiden sich durch den zumeist direkten Zusammenhang mit der Geburt stark von den Ursachen der Sterblichkeit der folgenden Altersstufen. Dies erfordert eine von den übrigen Altersstufen unabhängige Betrachtung. [↘ Grafik 1](#)

Die deutlichsten Abweichungen zwischen geglätteten und ausgeglichenen Werten lassen sich im Kindes- und Jugendalter beobachten. Während sich die Verläufe der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten von Jungen und Mädchen noch überschneiden (Alter 5), sind die Sterbewahrscheinlichkeiten der Jungen im geglätteten Verlauf durchweg höher als die der Mädchen. Auch im jungen Erwachsenenalter bis etwa 35 Jahre ist auf der logarithmierten Skala ein Einfluss des Glättungsverfahrens

Grafik 1

Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten für die allgemeine Sterbetafel 2010/12 für Deutschland



2016 - 01 - 0064

zu erkennen. Oberhalb dieses Alters gibt es schließlich keine deutlichen Unterschiede mehr zwischen den rohen und geglätteten Werten. In Fällen, in denen in den höchsten Altersstufen ab Alter 90 die Werte unplausibel sinken oder weniger stark ansteigen, als es die vorangegangenen Werte suggerieren, wurde nicht auf das Glättungsverfahren zur Generierung plausibler Werte zurückgegriffen, sondern auf ein Extrapolationsverfahren. Hierdurch lässt sich ein weiterer Anstieg in der Weise modellieren, wie er sich bei ausreichend großen Fallzahlen abzeichnen würde, während ein Glättungsverfahren die unplausible Altersentwicklung nachzeichnen würde. Hintergründe zum Extrapolationsverfahren werden in Abschnitt 2.2 dargelegt.

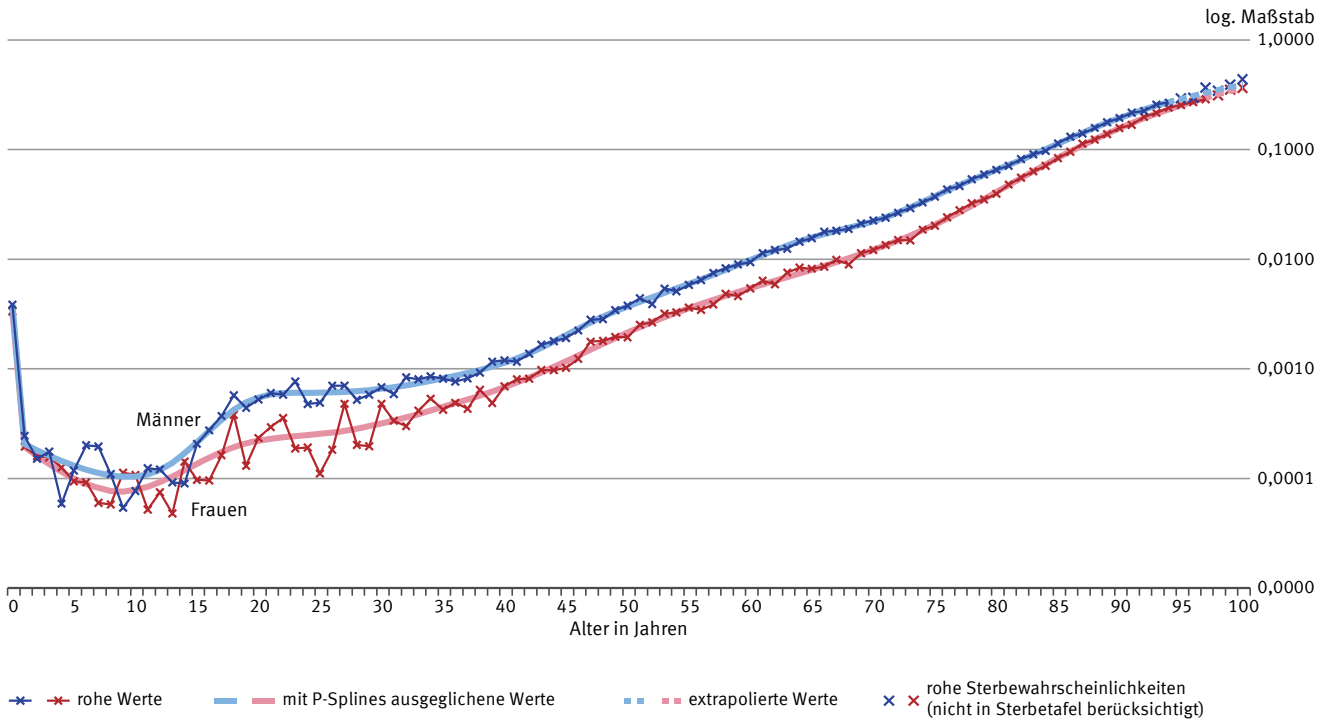
Die Relevanz des Glättungsverfahrens für die abgeleiteten Sterbewahrscheinlichkeiten steht in direktem Zusammenhang mit der Sterblichkeit in den verschiedenen Altersstufen. In den Altersjahren von 7 bis 11 bei den Jungen und von 6 bis 14 bei den Mädchen liegen die Sterbewahrscheinlichkeiten gegenwärtig unter 1 je

1 000. Aufgrund dieser sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten sind die tatsächlich beobachteten Fallzahlen Zufallsschwankungen unterworfen, die durch das Glättungsverfahren ausgeglichen werden. Die Auswirkungen des Glättungsverfahrens auf den Wert der durchschnittlichen Lebenserwartung sind dabei sehr gering. Auf Bundesebene wird die durchschnittliche Lebenserwartung bei Geburt erst ab der dritten Nachkommastelle beeinflusst.

Für einzelne Bundesländer lassen sich die grundlegenden Sterblichkeitsmuster aufgrund der deutlich geringeren Fallzahlen erheblich schwieriger ermitteln als für die Bevölkerung insgesamt. Entsprechend größer sind die Auswirkungen eines Glättungsverfahrens auf den Verlauf der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten, wie in Grafik 2 am Beispiel von Rheinland-Pfalz dargestellt ist. Die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten verlaufen bis Alter 35 deutlich sprunghafter als bei der Bevölkerung in Deutschland insgesamt. Auch in den folgenden Altersstufen sind noch Zufallsschwankungen zu erkennen, welche mithilfe des Glättungsverfahrens aus-

**Grafik 2**

Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten für die allgemeine Sterbetafel 2010/12 für Rheinland-Pfalz



2016 - 01 - 0065

geglichen werden. Trotz dieser starken Schwankungen ermöglicht es der P-Spline-Ausgleich, für 9 der 16 Bundesländer Verläufe zu generieren, die dem typischen Muster altersspezifischer Sterbewahrscheinlichkeiten entsprechen. In den verbleibenden sieben Bundesländern kommt es auch bei den mit dem P-Spline-Verfahren generierten Werten für die altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten zu unplausiblen Verläufen. Dies können Überschneidungen zwischen männlichen und weiblichen Sterbewahrscheinlichkeiten sein oder ein kontinuierlicher Anstieg der Sterbewahrscheinlichkeiten vom Kleinkindesalter an, ohne die Herausbildung des charakteristischen Plateaus im jungen Erwachsenenalter um Alter 20. In solchen Fällen wurde zusätzlich zum P-Spline-Ansatz das Logit-Modell angewandt, dessen Funktionsweise und Auswirkungen auf die generierten Verläufe der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten im folgenden Abschnitt erläutert werden.

➤ Grafik 2

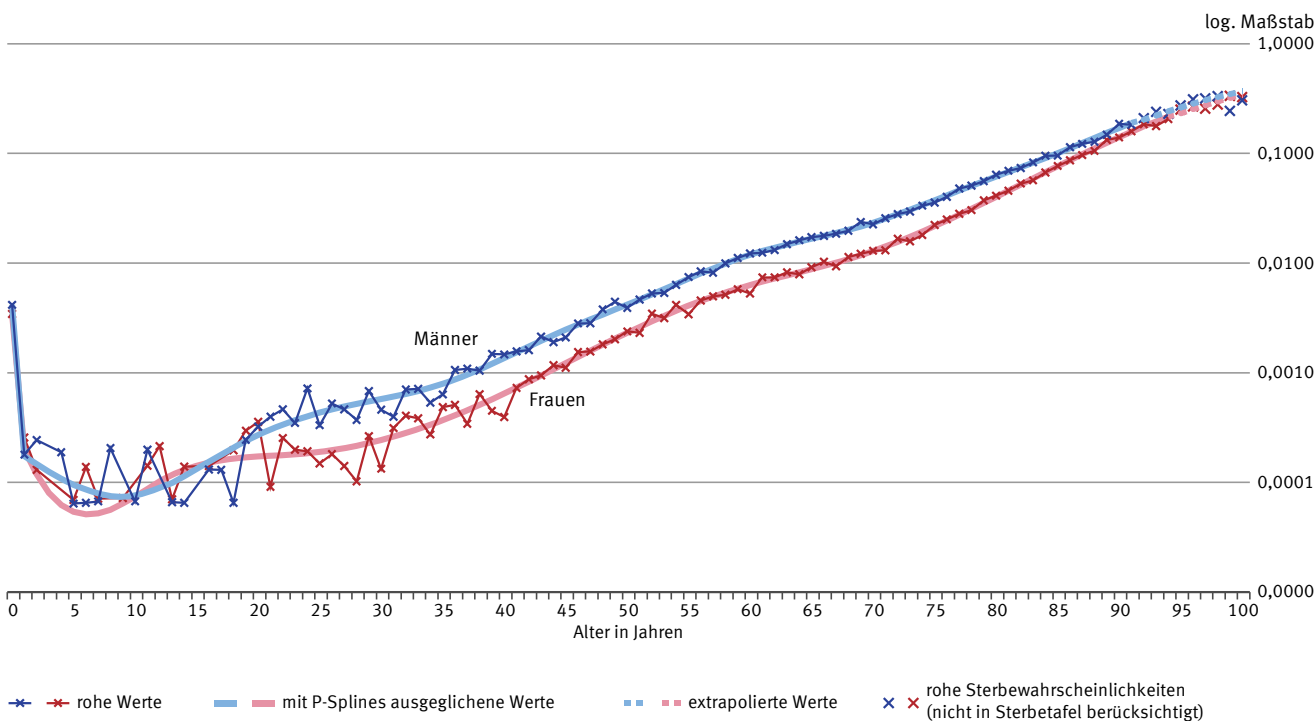
## Logit-Modell

Der in Grafik 3 dargestellte Verlauf verdeutlicht am Beispiel Hamburgs, weswegen die alleinige Anwendung des P-Spline-Verfahrens keine zufriedenstellenden Ergebnisse im Sinne plausibler grundlegender Sterblichkeitsmuster für einige der Bundesländer liefert. Aufgrund des offensichtlich fallzahlbedingten stark abgeschwächten Anstiegs der Sterbewahrscheinlichkeiten im Kindes- und Jugendalter wird das charakteristische Plateau, das sich in den rohen Einzelwerten durchaus erkennen lässt, im geglätteten Verlauf durch einen gleichmäßigen Anstieg überschrieben. Zudem haben in den geglätteten Verläufen Mädchen in den Altersjahren von 11 bis 15 höhere Sterbewahrscheinlichkeiten als die Jungen, was ebenfalls mit hoher Wahrscheinlichkeit auf die geringen Fallzahlen bei der Berechnung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten zurückzuführen ist. ➤ Grafik 3

Um auch in einer solchen Konstellation plausible Mortalitätsmuster zu ermitteln, kam bei der Erstellung der allgemeinen Sterbetafel auf Ebene der Bundesländer

Grafik 3

Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten für die allgemeine Sterbetafel 2010/12 für Hamburg



2016 - 01 - 0066

zusätzlich zum P-Spline-Verfahren auch das sogenannte Logit-Modell zum Einsatz. Dieses Modell wurde in den 1970er-Jahren von Brass (1971, 1975) als Alternative zu den Modellsterbetafeln von Coale und Demeny (1966) entwickelt. Modellsterbetafeln sollen für menschliche Bevölkerungen typische Mortalitätsmuster abbilden. Sie werden vor allem in Entwicklungsländern verwendet, um dort die fehlerhaften, unvollständigen oder gar nicht verfügbaren Informationen zur Sterblichkeit zu ergänzen beziehungsweise zu ersetzen. Im Logit-Modell werden Informationen über das Mortalitätsniveau und – sofern möglich – über das spezifische Altersmuster der Sterblichkeit einer Bevölkerung verwendet, um durch entsprechende Anpassung einer vorgegebenen Standardsterbetafel eine neue Sterbetafel zu modellieren, welche die Charakteristika der vorherrschenden Mortalitätsverhältnisse bestmöglich widerspiegelt. Der Verlauf der Standardsterbetafel wird dabei mithilfe der zwei Parameter  $\alpha$  (Sterblichkeitsniveau) und  $\beta$  (Altersmuster der Sterbewahrscheinlichkeiten), die aus den vorliegenden Daten

geschätzt werden, in eine neue Sterbetafel mithilfe der Formel

$$\text{logit}(1-l_x) = \alpha + \beta \cdot \text{logit}(1-l_x^S)$$

transferiert, wobei der Logit definiert ist als

$$\text{logit}(1-l_x) = 0,5 \cdot \ln\left(\frac{1-l_x}{l_x}\right).$$

Eine Kombination aus Werten des Logit-Modells im Kindes-, Jugend- und jungen Erwachsenenalter mit den durch das P-Spline-Verfahren geglätteten Werten in den darauf folgenden Altersjahren wurde zur Erstellung der allgemeinen Sterbetafeln für Berlin, Bremen, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Schleswig-Holstein und Thüringen eingesetzt. Als Standardsterbetafel für das Logit-Modell diente die allgemeine Sterbetafel 2010/12 für Deutschland insgesamt. In diesen Bundesländern ist somit bei der Erstellung der allgemei-

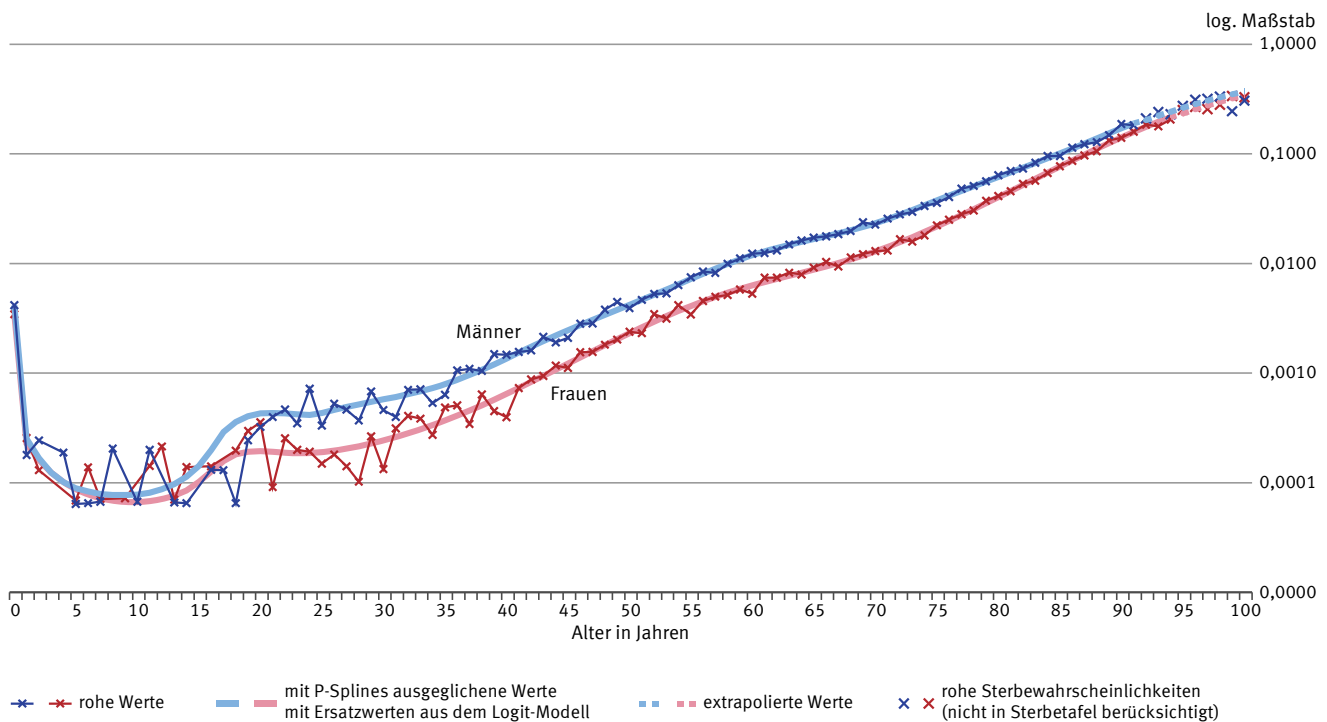
nen Sterbetafel neben der beobachteten Sterblichkeit im Betrachtungszeitraum in jungen Altersjahren also auch die Information des Sterblichkeitsverlaufes auf Bundesebene mit eingeflossen.

Für Hamburg wurden die Parameter des Logit-Modells nur auf Basis des Verlaufes der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten bis zum Alter 40 geschätzt. Auch in den anderen Bundesländern wurden für die Logit-Modellierung nur etwas über den Altersbereich hinausgehende Werte verwendet, für den die Sterbewahrscheinlichkeiten mithilfe des Modells geschätzt wurden. Auf diese Weise ist sowohl eine möglichst genaue Anpassung an die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten im Kindes- und jungen Erwachsenenalter als auch ein plausibler Übergang zu den mit dem P-Spline-Verfahren geglätteten Werten gewährleistet. Im Ergebnis für Hamburg ergeben sich durch diese Anpassung die in Grafik 4 dargestellten Verläufe, die plausiblere Sterblichkeitsmuster abbilden als jene in Grafik 3. Der resultierende Wert für die durchschnittliche Lebenserwartung bei Geburt wird auch durch

diesen zusätzlichen methodischen Eingriff nur marginal beeinflusst. Im Vergleich zu den aus den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten ermittelten Werten unterscheiden sich die Ergebnisse durch die datenverändernden Verfahren um maximal plus/minus 0,06 Jahre. Für Hamburg erhöhen sich die Werte zum Beispiel um 0,05 Jahre bei den Männern und 0,01 Jahre bei den Frauen. Der Grund für diese geringen Auswirkungen liegt in der niedrigen Sterblichkeit bis zum Alter 25, wodurch unterschiedliche Sterblichkeitsniveaus in diesem Altersbereich kaum einen Einfluss auf den Wert für die Lebenserwartung bei Geburt haben. Würde es in Hamburg zwischen Alter 1 und Alter 24 gar keinen Sterbefall geben, dann würde sich die Lebenserwartung bei Geburt für Männer nur um 0,3 Jahre und für Frauen nur um 0,2 Jahre erhöhen. Die Korrekturen der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten mithilfe eines (oder mehrerer) Glättungsverfahren dienen somit in erster Linie der Generierung plausibler Sterblichkeitsmuster, nicht jedoch der Korrektur der auf Basis der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten gemessenen (ferneren) Lebenserwartung. [↘ Grafik 4](#)

### Grafik 4

Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten für die allgemeine Sterbetafel 2010/12 für Hamburg



2016 - 01 - 0067

## 2.2 Extrapolation

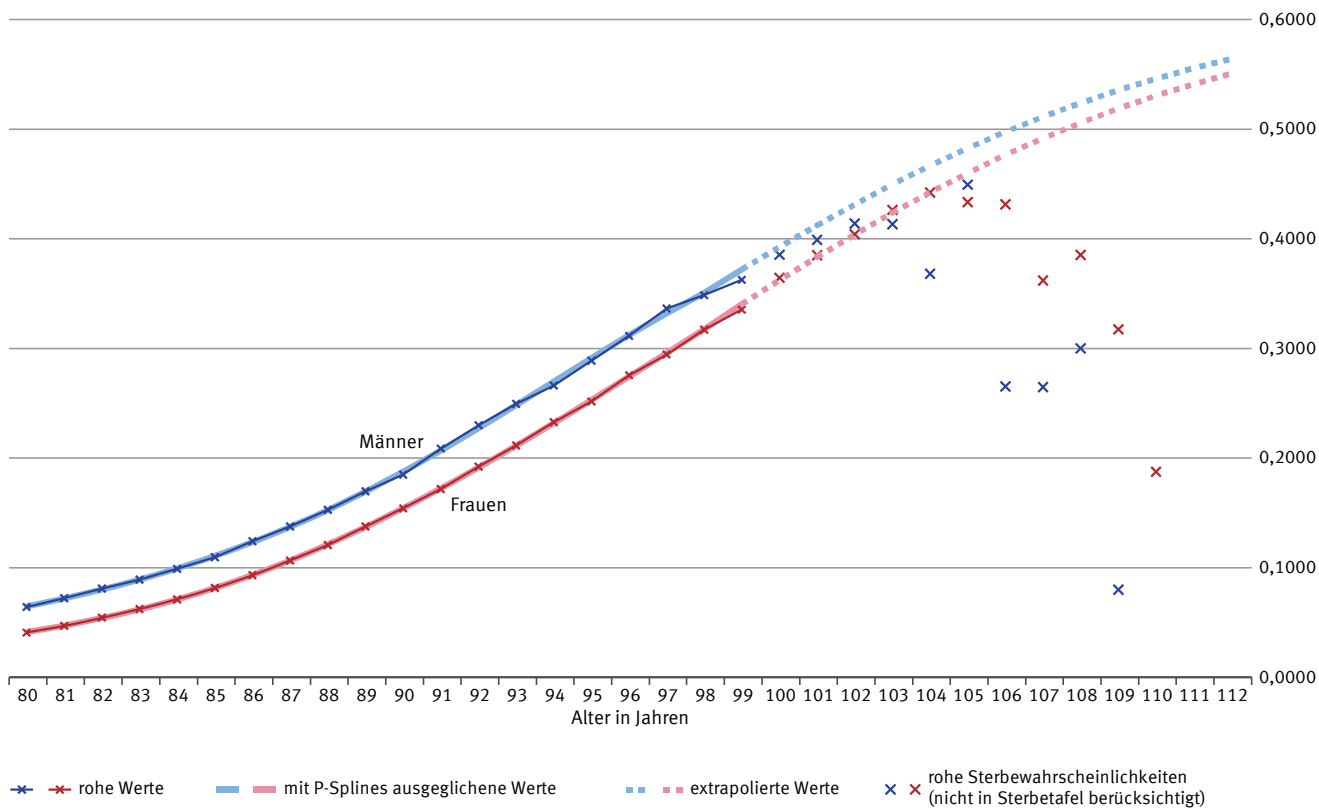
Während es im Kindes- und Jugendalter aufgrund niedriger Sterbefallzahlen zu zufallsbedingten Schwankungen kommen kann, lassen sich diese in den höchsten Altersstufen primär auf die niedrigen Besetzungszahlen der Altersklassen zurückführen. Die Schwierigkeit einer plausiblen Schätzung der Sterbewahrscheinlichkeit verlagert sich daher vom Zähler in den Nenner. Auf Bundesebene gewinnt diese Problematik unter Verwendung der Zensusdaten für die allgemeine Sterbetafel 2010/12 erst ab dem Alter 100 an Bedeutung, in kleineren Bundesländern jedoch schon früher. Insbesondere bei der Fortschreibung der Mortalität in die Zukunft könnte die Verwendung von rohen Sterbewahrscheinlichkeiten zu unplausiblen Verläufen führen. Daher wurde die Sterblichkeit in den höchsten Altersstufen mithilfe des folgenden parametrischen Sterblichkeitsmodells extrapoliert:

$$q_x = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\alpha \cdot \exp(\beta x)}{1 + \alpha \cdot \exp(\beta x)} + \gamma\right)\right]$$

Das zugrunde liegende Modell beschreibt mit den drei zu schätzenden Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  einen logistischen Verlauf der Sterblichkeit und wurde zunächst für Sterberaten ( $m_x$ ) entwickelt. Unter der Annahme einer konstanten Sterblichkeit in Altersstufe  $x$  kann es mithilfe der Transformation  $q_x = 1 - \exp[-m(x)]$  jedoch auch für Sterbewahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden. Das Modell, welches durch die logistische Form eine „Entschleunigung“ (deceleration) der Sterblichkeit mit zunehmenden Alter impliziert, wurde verwendet, da es eine hohe Anpassung an empirisch beobachtete Daten leistet, wie beispielsweise Thatcher und andere (1998) oder Thatcher (1999) schreiben. Basierend auf der Standardannahme von binomial verteilten Sterbewahrscheinlichkeiten wurden die drei Parameter wie

Grafik 5

Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten ab dem Alter 80 für die allgemeine Sterbetafel 2010/12 für Deutschland

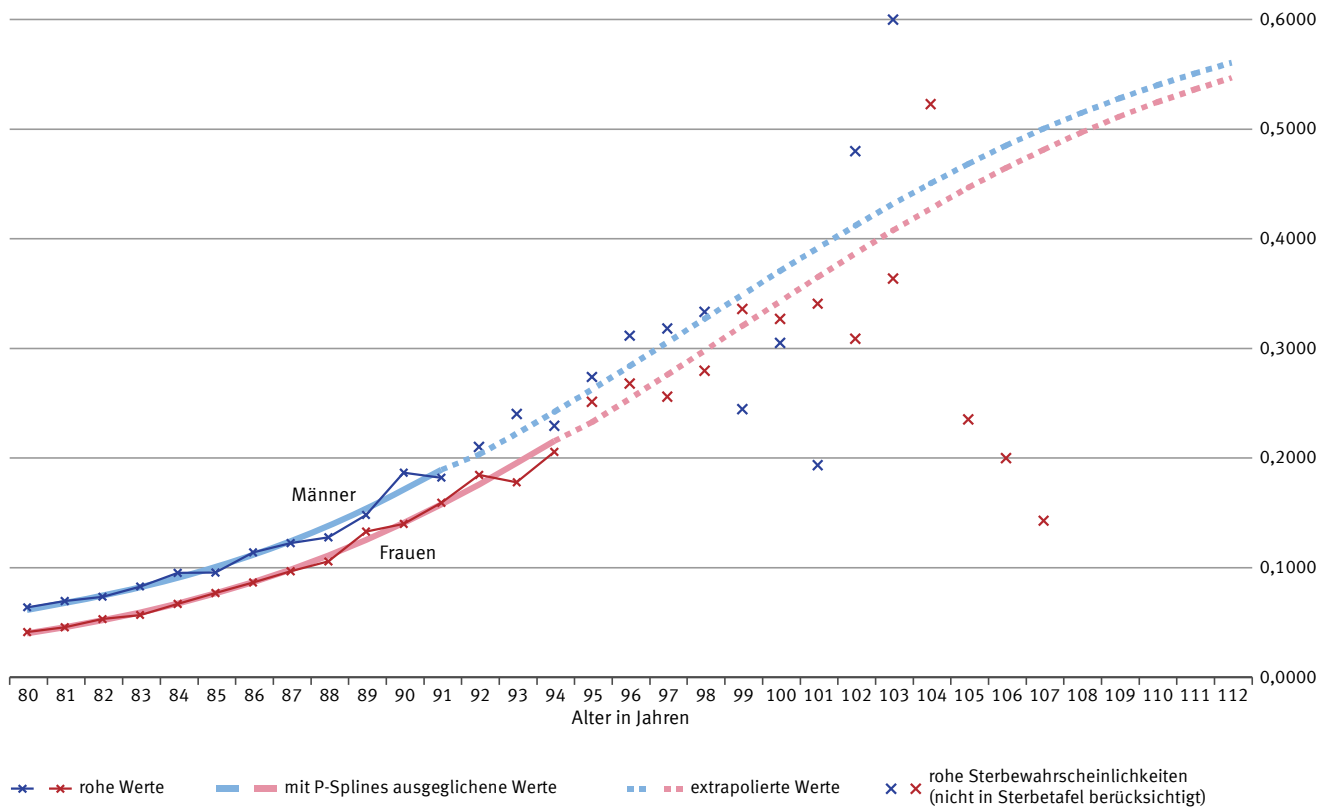


2016 - 01 - 0068



**Grafik 6**

Alterspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten ab dem Alter 80 für die allgemeine Sterbetafel 2010/12 für Hamburg



2016 - 01 - 0069

beispielsweise bei Yi/Vaupel (2003) mittels eines Maximum-Likelihood Ansatzes geschätzt:

$$LL = \sum_x (D_x \cdot \ln q_x) + \sum_x [(D_x + A_x) \cdot \ln(1 - q_x)]$$

Dabei sind  $D_x$  (Sterbefälle nach Alter) und  $A_x$  (Anfangsbestände nach Alter) Zähler und Nenner aus der Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$ , die gemäß der parametrischen Darstellung des logistischen Modells berücksichtigt werden. Die Stützbereiche zur Schätzung des Modells wurden so gewählt, dass ein glatter Übergang der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten und der Modellwerte gewährleistet und eine Überschneidung der Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern und Frauen ausgeschlossen ist: Der Stützbereich für die Schätzung der Parameter des logistischen Modells betrug jeweils 15 bis 20 Altersjahre oberhalb von Alter

70, die noch einen plausiblen Verlauf der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten aufwiesen. In der Log-Likelihood-Funktion wurden zudem, neben den aus den Zensusergebnissen hervorgegangenen Anfangsbeständen, nicht die beobachteten Zahlen der Gestorbenen nach Alter und Geburtsjahrgang verwendet, sondern die aus dem P-Spline-Verfahren hervorgegangenen Schätzwerte. Dadurch konnte ein fließender Übergang zwischen geglätteten und extrapolierten Werten gestaltet werden.

Bereits in den Grafiken 1 bis 4 wurden die Sterbewahrscheinlichkeiten im sehr hohen Alter als unterbrochene Linie dargestellt, sofern sie nicht mithilfe des P-Spline-Verfahrens, sondern mithilfe des Extrapolationsverfahrens generiert wurden. Die Grafiken 5 und 6 zeigen die entsprechenden Werte für Deutschland und Hamburg noch einmal ohne die logarithmische Skala vom Alter 80 bis Alter 112, dem letzten Alter, für das Sterbewahr-

scheinlichkeiten ermittelt wurden. Die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten, die somit keine Berücksichtigung in der Erstellung der Sterbetafel fanden, sind jeweils als einzelne Datenpunkte abgebildet.

Auf Ebene der Bundesländer musste im Vergleich zur Sterbetafel für Deutschland insgesamt zumeist etwas früher im Altersverlauf auf extrapolierte Werte zurückgegriffen werden, da hier die geringen Fallzahlen früher unplausible Verläufe verursachen können. Auf Bundesebene weisen die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten der Frauen auf Basis der Zensusergebnisse sogar bis zum Alter 104 einen plausiblen Verlauf auf. Dennoch wurden auch für sie die Werte bereits ab dem Alter 100 extrapoliert, da es bei einer Berücksichtigung weiterer Werte zu einer Überschneidung von männlichen und weiblichen Sterbewahrscheinlichkeiten gekommen wäre. Für die allgemeine Sterbetafel Hamburgs wurde aus diesem Grund bereits ab dem Alter 92 bei den Männern und ab dem Alter 95 bei den Frauen auf extrapolierte Werte zurückgegriffen. Die Auswirkungen auf den Wert für die durchschnittliche Lebenserwartung bei Geburt sind dabei in allen Fällen sehr gering. In Deutschland wäre er bei Männern um 0,001 Jahre und bei Frauen um 0,0001 Jahre höher, wenn lediglich die rohen Werte im hohen Alter zur Berechnung herangezogen worden wären. Selbst bei den Männern in Hamburg, bei denen bereits ab dem Alter 92 extrapolierte Werte genutzt wurden, sinkt die durchschnittliche Lebenserwartung bei Geburt durch diesen methodischen Eingriff nur um 0,008 Jahre. Die fernere Lebenserwartung im Alter 75 sinkt um 0,01 Jahre und im Alter 90 um 0,05 Jahre bei Nutzung der höheren extrapolierten Sterbewahrscheinlichkeiten im Vergleich zur Nutzung der erratischen Originalwerte.

↘ Grafik 5, Grafik 6

### 3

## Fazit und Ausblick

---

Die bei der Erstellung der allgemeinen Sterbetafel 2010/12 angewandten datenverändernden Verfahren haben es ermöglicht, grundlegende Muster der altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten in Deutschland abzuleiten. Mit der Veröffentlichung der Ergebnisse stehen diese grundlegenden Muster nicht nur für Deutschland insgesamt, sondern auch für die Bundes-

länder und die Einteilung nach neuen Ländern (ohne Berlin-Ost) und dem früheren Bundesgebiet (ohne Berlin-West) zur Verfügung. Die vorgestellte Methodik hat es dabei ermöglicht, die mit den rohen Daten gemessenen Werte für die (fernere) Lebenserwartung möglichst wenig zu beeinflussen. Somit passen sich die Ergebnisse der allgemeinen Sterbetafel plausibel in Zeitreihen mit Ergebnissen ein, die ohne diese methodischen Eingriffe bei der laufenden Berechnung der Sterbetafeln generiert wurden.

Die vorgestellte Methodik ist dazu geeignet, bei künftigen Forschungsprojekten beispielsweise auf die Erstellung von Sterbetafeln für die deutsche und die nicht deutsche Bevölkerung übertragen zu werden. Die vorliegende allgemeine Sterbetafel für die Gesamtbevölkerung könnte durch solche Ergebnisse ergänzt werden. Auch bei einer Berechnung von Sterbetafeln nach Staatsangehörigkeit ist es sinnvoll, grundlegende und somit geglättete Sterblichkeitsmuster der deutschen und der nicht deutschen Bevölkerung miteinander zu vergleichen, um Zufallseinflüsse nicht zu überinterpretieren. Bei Sterbetafeln für kleinere Teilbevölkerungen kann es dabei sinnvoll sein, zusätzlich zu dem Einsatz von Glättungsverfahren auch Konfidenzintervalle für die Sterbewahrscheinlichkeiten und die (fernere) Lebenserwartung zu bestimmen.

Die veröffentlichten geglätteten altersspezifischen Sterblichkeitsmuster bieten zudem zahlreiche weitere Verwendungsmöglichkeiten. So eignen sie sich zum Beispiel in besonderem Maße als Basiswerte für eine altersspezifische Vorausberechnung der Sterblichkeit. Durch die Verwendung von geglätteten Verläufen werden Zufallseinflüsse nicht in die Zukunft fortgeschrieben, wodurch die Plausibilität der vorausberechneten Mortalitätsmuster und somit die Plausibilität der Bevölkerungsvorausberechnung insgesamt erhöht wird. Folgerichtig wurden im Rahmen der 13. koordinierten Bevölkerungsvorausberechnung bereits die Ergebnisse der allgemeinen Sterbetafel 2010/12 als Basiswerte für die Vorausberechnung der Sterblichkeit in Deutschland und in den Bundesländern genutzt (Statistisches Bundesamt, 2015b). Zudem können die generierten Sterblichkeitsmuster auch als Standardsterbetafeln und somit als Grundlage für die Erstellung von Sterbetafeln in tieferer regionaler Untergliederung – beispielsweise nach Kreisen oder Gemeinden – dienen. Für gewöhnlich ist es aufgrund der geringen Fallzahlen in diesen regionalen

Einteilungen nicht möglich, plausible altersspezifische Mortalitätsmuster zu ermitteln. Diese wären jedoch notwendig, um beispielsweise die entsprechende Bevölkerung nach Einzelaltersjahren vorzuberechnen. Mit Hilfe des Logit-Modells und der allgemeinen Sterbetafel des jeweils übergeordneten Bundeslandes als Standardsterbetafel ließen sich entsprechende Sterbetafeln vermutlich mit weniger Unsicherheiten ableiten. [u](#)

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- de Boor, Carl. *On Calculating with B-splines*. In: Journal of Approximation Theory. Jahrgang 6/1972, Ausgabe 1, Seite 50 ff.
- Brass, William. *On the Scale of Mortality*. In: Brass, William (Herausgeber). Biological Aspects of Demography. London 1971, Seite 69 ff.
- Brass, William. *Methods for Estimating Fertility and Mortality from Limited and Defective Data*. Chapel Hill 1975.
- Camarda, Carlo Giovanni. *Mortality Smooth: an R Package for Smoothing Poisson Counts with P-Splines*. In: Journal of Statistical Software. Ausgabe 50/2012, Seite 1 ff.
- Coale, Ansley J./Paul Demeny. *Regional Model Life Tables and Stable Populations*. Princeton 1966.
- Currie, Iain D./Durban, Maria/Eilers, Paul H. C. *Smoothing and Forecasting Mortality Rates*. In: Statistical Modelling. Ausgabe 4/2004, Seite 279 ff.
- Eilers, Paul H. C./Marx, Brian D. *Flexible Smoothing with B-splines and Penalties*. In: Statistical Science. Jahrgang 11/1996, Ausgabe 2, Seite 89 ff.
- Eilers, Paul H. C./Marx, Brian D. *Splines, Knots, and Penalties*. In: Computational Statistics, Wiley Interdisciplinary Reviews. Jahrgang 2/2010, Ausgabe 6, Seite 637 ff.
- Fahrmeier, Ludwig/Kneib, Thomas/Lang, Stefan. *Regression. Modelle, Methoden und Anwendungen*. Berlin/Heidelberg/New York 2007.
- Ouellette, Nadine/Bourbeau, Robert. *Changes in the Age-at-death Distribution in four Low Mortality Countries: A Nonparametric Approach*. In: Demographic Research. Jahrgang 25/2011, Ausgabe 19, Seite 595 ff.
- Rau, Roland/Muszyńska, Magdalena M./Eilers, Paul H. C. *Minor Gradient in Mortality by Education at the Highest Ages: An Application of the Extinct-Cohort Method*. In: Demographic Research. Jahrgang 29/2013, Heft 19, Seite 507 ff.
- Statistisches Bundesamt. *Allgemeine Sterbetafel 2010/12 – Methodische Erläuterungen und Ergebnisse*. 2015a. [Zugriff am 8. Januar 2016]. Verfügbar unter: [www.destatis.de](http://www.destatis.de)
- Statistisches Bundesamt. *Bevölkerung Deutschlands bis 2060 – 13. koordinierte Bevölkerungsvorausberechnung*. 2015b. [Zugriff am 8. Januar 2016]. Verfügbar unter: [www.destatis.de](http://www.destatis.de)
- Thatcher, A. Roger/Väinö, Kannisto/Vaupel, James W. *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*. Monographs on Population Aging Series. Odense 1998.
- Thatcher, A. Roger. *The Long-Term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age*. In: Journal of the Royal Statistical Society. Ausgabe 162, Heft 1/1999, Series A (Statistics in Society), Seite 5 ff.
- Yi, Zeng/Vaupel, James W. *Oldest Old Mortality in China*. In: Demographic Research. Jahrgang 8/2003, Ausgabe 7, Seite 215 ff.

---

#### **Herausgeber**

Statistisches Bundesamt, Wiesbaden

[www.destatis.de](http://www.destatis.de)

---

#### **Schriftleitung**

Dieter Sarreither, Präsident des Statistischen Bundesamtes

Redaktionsleitung: Kerstin Hänsel

Redaktion: Ellen Römer

---

#### **Ihr Kontakt zu uns**

[www.destatis.de/kontakt](http://www.destatis.de/kontakt)

---

#### **Erscheinungsfolge**

zweimonatlich, erschienen im Februar 2016

Das Archiv aller Ausgaben ab Januar 2001 finden Sie unter [www.destatis.de/publikationen](http://www.destatis.de/publikationen)

---

#### **Print**

Einzelpreis: EUR 18,- (zzgl. Versand)

Jahresbezugspreis: EUR 108,- (zzgl. Versand)

Bestellnummer: 1010200-16001-1

ISSN 0043-6143

ISBN 978-3-8246-1043-3

---

#### **Download (PDF)**

Artikelnummer: 1010200-16001-4, ISSN 1619-2907

---

#### **Vertriebspartner**

IBRo Versandservice GmbH

Bereich Statistisches Bundesamt

Kastanienweg 1

D-18184 Roggentin

Telefon: +49 (0) 382 04 / 6 65 43

Telefax: +49 (0) 382 04 / 6 69 19

[destatis@ibro.de](mailto:destatis@ibro.de)

---

Papier: Metapaper Smooth, FSC-zertifiziert, klimaneutral, zu 61% aus regenerativen Energien

© Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2016

Vervielfältigung und Verbreitung, auch auszugsweise, mit Quellenangabe gestattet.